COMMENTARII MATHEMATICI
UNIVERSITATIS SANCTI PAULI
Vol. 36, No. 1, 1987

ed. RIKKYO UNIV/MATH
IKEBUKURO TOKYO
171 JAPAN

Über ein Analogon zu einem Satz von Walfisz

von

Winfried RECKNAGEL

(Received September 2, 1986)

1. Problemstellung und Resultate

Für $k \in \boldsymbol{N}$ und $u \in \boldsymbol{R}$ bezeichne $B_k(u)$ das Bernoulli*sche* Polynom der Ordnung k, $[u]:=\max\{m \in \boldsymbol{Z}: m \leqslant u\}$ sowie $\psi_k(u):=B_k(u-[u])$. Des weiteren seien $x, y_1, y_2 \in \boldsymbol{R}$ mit $x>0$ hinreichend groß, $0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant x$ und es bezeichne

$$S_k(x; y_1, y_2):=\sum_{y_1<n \leqslant y_2} \frac{1}{n} \psi_k\left(\frac{x}{n}\right), \tag{1.1}$$

$$S_k(x):=S_k(x; 0, x)=\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} \psi_k\left(\frac{x}{n}\right). \tag{1.2}$$

Im Fall $k=1$ wurde die Summe (1.2) von verschiedenen Autoren untersucht und abgeschätzt. Das derzeit beste Resultat lautet

$$S_1(x)=O(\log^{2/3} x)\,; \tag{1.3}$$

(cf. Walfisz [8], Satz 3, p. 98 sowie pp. 224–225). Die Abschätzung (1.3) gestattet ihrerseits Anwendungen beim Studium des asymptotischen Verhaltens der Teilerfunktion

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n)\,; \qquad \sigma(n):=\sum_{d \mid n} d\,;$$

resp. beim hierzu eng verwandten vierdimensionalen Kugelproblem (cf. Walfisz loc. cit., p. 99 sowie pp. 103–105 und Fricker [2], pp. 34–37).

Im Fall $k \geqslant 2$ steht eine Untersuchung von $S_k(x)$ noch aus. Wegen $\psi_k(u)=O(1)$ folgt jedenfalls trivial

$$S_k(x)=O(\log x)\,,$$

wobei die auftretende O-Konstante, wie auch im Folgenden, nur von k abhängt. Auf Grund der rascheren Konvergenz der Fourierreihe von $\psi_k(\cdot)$ ist sogar zu erwarten, daß sich die Abschätzung (1.3) im Fall $k \geqslant 2$ verschärfen läßt. Im Detail:

THEOREM. *Es sei $x \in \boldsymbol{R}$ mit $x>0$ hinreichend groß sowie $k \in \boldsymbol{N}$ mit $k \geqslant 2$. Dann gilt*

$$S_k(x) = O(\log^{1/2} x)\,. \tag{1.4}$$

Bemerkung. Der Nachweis von (1.4) ist im Wesentlichen eine Anwendung von Hilfssätzen aus dem Weyl*schen* resp. Vinogradov*schen* Ideenkreis, die seinerzeit von Walfisz (loc. cit.) zur Behandlung von $S_1(x)$ angepasst worden sind. In diesem Zusammenhang sei schließlich auch auf die fortführenden Arbeiten [3] und [4] hingewiesen.

Wie im Abschnitt 5 gezeigt werden soll, gestattet (1.4) ebenfalls Anwendungen bei der Untersuchung zahlentheoretischer Verteilungs probleme.

2. Bekannte Hilfssätze

Die im Verlauf der Herleitung von (1.4) auftretenden Exponential summen resp. ψ_k-Summen werden vorteilhaft mit dem nachstehenden Ensemble von Hilfssätzen abgeschätzt.

LEMMA 1. *Es sei $r \in \boldsymbol{N}$ mit $r \geqslant 95$ sowie $a, b, t \in \boldsymbol{R}$ mit $t > 0$ hinreichend groß, $t^{1/r} \leqslant a \leqslant b \leqslant 2a \leqslant 2t^{21/(10r)}$. Des weiteren bezeichne*

$$\theta := (266000\, r^2)^{-1}\,. \tag{2.1}$$

Dann gilt

$$\sum_{a < n \leqslant b} e\left(\frac{t}{n}\right) = O(a^{1-\theta})\,, \tag{2.2}$$

wobei $e(u) := e^{2\pi i u}$ für $u \in \boldsymbol{R}$ bezeichnet.

LEMMA 2. *Es sei $r \in \boldsymbol{N}$ sowie $a, b, t \in \boldsymbol{R}$ mit $t > 0$ hinreichend groß, $t^{1/(2+r)} \leqslant a \leqslant b \leqslant 2a \leqslant 2t^{2/(3+r)}$. Des weiteren bezeichne*

$$R := 2^{r-1}\,, \qquad R_1 := (1+r)R\,. \tag{2.3}$$

Dann gilt

$$\sum_{a < n \leqslant b} e\left(\frac{t}{n}\right) = O(a^{1 - 1/R - 1/R_1} t^{1/R_1} \log t)\,. \tag{2.4}$$

LEMMA 3. *Es seien $x, y_1, y_2 \in \boldsymbol{R}$ mit $x > 0$ hinreichend groß, $0 < y_1 \leqslant y_2 \leqslant x$ sowie $k \in \boldsymbol{N}$ mit $k \geqslant 2$. Dann gilt*

$$\sum_{y_1 < n \leqslant y_2} \psi_k\left(\frac{x}{n}\right) = O(x^{-1/2} y_2^{3/2}) + O(x^{1/2} y_1^{-1/2})\,.$$

Anmerkungen. Die Hilfssätze 1 und 2 sind der Monographie [8] von Walfisz entlehnt. Auf Grund von $[a] = a + O(1)$ überzeugt man sich in (2.2) resp. (2.4) leicht davon, daß die Forderung $a \in \boldsymbol{N}$ fallengelassen werden kann. Den dritten Hilfssatz gewinnt man aus Lemma 3 der Arbeit [6], indem man dort $\beta := 1$ und das Exponenten-Paar $(\kappa, \lambda) := (1/2,\ 1/2)$ auszeichnet.

3. Abschätzungen für $S_k(x; y_1, y_2)$

Für diverse y_1, y_2 wird die in (1.1) eingeführte Summe nach oben abgeschätzt. Zunächst

LEMMA 4. *Es sei $x \in \boldsymbol{R}$ mit $x>0$ hinreichend groß sowie $k, r \in \boldsymbol{N}$ mit $k \geqslant 2$ und $95 \leqslant r \leqslant (2\log x)^{1/2}$. Des weiteren bezeichne*

$$Q := 10^{-6} r^{-3} < \frac{1}{2}, \qquad x_1 := x^{3/(2r)}, \qquad x_2 := x^{3/(2(r-1))}. \tag{3.1}$$

Dann gilt

$$S_k(x; x_1, x_2) = O(x^{-Q}). \tag{3.2}$$

Beweis. Es sei $r \in \boldsymbol{N}$ mit $95 \leqslant r \leqslant (2\log x)^{1/2}$ fest gewählt. Mit $a_l := 2^l x_1$ für $l = 0, 1, \cdots, L := [3\log x/(2r(r-1)\log 2)] > 1$ und $a_{L+1} := x_2$ erhält man für die Summe in (1.1) folgende Zerlegung

$$S_k(x; x_1, x_2) = \sum_{l=0}^{L} S_k(x; a_l, a_{l+1}). \tag{3.3}$$

Die Abschätzung der in (3.3) rechts stehenden Summanden wird mittels partieller Summation auf die Abschätzung von

$$T_k(x; a_l, a_{l+1}) := \sum_{a_l < n \leqslant a_{l+1}} \psi_k\left(\frac{x}{n}\right) \tag{3.4}$$

zurückgeführt. Bekanntlich besitzt $\psi_k(\cdot)$ für alle $u \in \boldsymbol{R}$ die Fourierentwicklung

$$\psi_k(u) = c_k \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} m^{-k} e(mu); \qquad c_k := \frac{-k!}{(2\pi i)^k};$$

sodaß man in (3.4) weiter erhält

$$T_k(x; a_l, a_{l+1}) = O(U_1) + O(U_2) \tag{3.5}$$

mit

$$U_1 := \sum_{m \leqslant \xi} m^{-2} \left| \sum_{a_l < n \leqslant a_{l+1}} e\left(\frac{mx}{n}\right) \right|, \tag{3.6}$$

$$U_2 := \sum_{m > \xi} m^{-2} \left| \sum_{a_l < n \leqslant a_{l+1}} e\left(\frac{mx}{n}\right) \right|, \tag{3.7}$$

$$\xi := a_l^r x^{-1}. \tag{3.8}$$

Auf die in U_1 steckende Exponentialsumme soll jetzt Lemma 1 mit $t := mx$, $a := a_l$, $b := a_{l+1}$ angewendet werden. Wegen (3.1) und (3.8) ist unter den hiesigen Voraussetzungen

$$a_l^r = \xi x \geqslant mx = t\,,$$

$$t^{21/(20r)} \geqslant x^{21/(20r)} \geqslant x_2 \geqslant a_l\,,$$

sodaß eine Anwendung von Lemma 1 sofort liefert

$$\sum_{a_l < n \leqslant a_{l+1}} e\left(\frac{mx}{n}\right) = O(a_l^{1-\theta})$$

mit dem in (2.1) angegebenen Wert von θ. (3.6) geht hiermit über in

$$U_1 = O(a_l^{1-\theta})\,. \tag{3.9}$$

In (3.7) wird die Exponentialsumme trivial zu $O(a_l)$ abgeschätzt, daher (man beachte (3.8))

$$U_2 = O(a_l^{1-r}x)\,. \tag{3.10}$$

Trägt man (3.9) und (3.10) in (3.5) ein, so führt eine anschließende partielle Summation zu

$$S_k(x;\, a_l,\, a_{l+1}) = O(a_l^{-\theta}) + O(a_l^{-r}x)$$

und damit in (3.3) weiter

$$S_k(x;\, x_1,\, x_2) = O(x^{-3\theta/(2r)}) + O(x^{-1/2})\,. \tag{3.11}$$

Auf Grund von (2.1) und (3.1) ist aber $3\theta/(2r) > Q$, womit aus (3.11) die Abschätzung (3.2) folgt.

LEMMA 5. *Es sei $x \in \boldsymbol{R}$ mit $x > 0$ hinreichend groß sowie $k, r \in \boldsymbol{N}$ mit $k \geqslant 2$ und $r \leqslant \log^{1/2} x - 4$. Des weiteren bezeichne*

$$R := 2^{r-1}\,, \qquad x_3 := x^{2/(4+r)}\,, \qquad x_4 := x^{2/(3+r)}\,. \tag{3.12}$$

Dann gilt

$$S_k(x;\, x_3,\, x_4) = O(x^{-1/(10rR)} \log x)\,. \tag{3.13}$$

Beweis. Analog zum vorstehenden Beweis setzt man $a_l := 2^l x_3$ für $l = 0, 1, \cdots, L := [2 \log x/((3+r)(4+r) \log 2)] > 1$ sowie $a_{L+1} := x_4$. Die Zerlegung (3.3) bleibt natürlich auch mit den modifizierten Größen a_l, a_{l+1} weiterhin gültig. Es verbleibt lediglich

$$T_k(x;\, a_l,\, a_{l+1}) = O(U) + O(a_l^{-1-r}x)$$

mit

$$U := \sum_{m \leqslant \xi} m^{-2} \left| \sum_{a_l < n \leqslant a_{l+1}} e\left(\frac{mx}{n}\right) \right|, \qquad \xi := a_l^{2+r} x^{-1} \tag{3.14}$$

zu untersuchen. Die in (3.14) auftretende Exponentialsumme wird mittels Lemma 2 abgeschätzt. Mit der Wahl von $t := mx$, $a := a_l$, $b := a_{l+1}$ sind dort die Voraussetzungen erfüllt und eine Anwendung liefert unter Berücksichtigung von (2.3)

$$U=O(a_l^{1-1/R-1/R_1}x^{1/R_1}\log x)\,.$$

Nach vorexerziertem Muster gelangt man schließlich zu

$$S_k(x;\,x_3,\,x_4)=O(x^{-r/((1+r)(4+r)R)}\log x)\,.$$

Beachtet man zudem, daß der im O-Term auftretende Exponent durch $-(10rR)^{-1}$ majorisiert wird, ist damit schon (3.13) begründet.

LEMMA 6. *Es sei $x\in\boldsymbol{R}$ mit $x>0$ hinreichend groß sowie $k\in\boldsymbol{N}$ mit $k\geqslant 2$. Dann gilt*

$$S_k(x;\,x^{1/2},\,x)=O(1)\,.$$

Beweis. Zunächst liefert die Abel*sche* Summationsmethode

$$S_k(x;\,x^{1/2},\,x)=x^{-1}\sum_{x^{1/2}<n\leqslant x}\psi_k\left(\frac{x}{n}\right)+\int_{x^{1/2}}^{x}t^{-2}\sum_{x^{1/2}<n\leqslant t}\psi_k\left(\frac{x}{n}\right)dt\,.$$

Hier kommt Lemma 3 mit $y_1:=x^{1/2}$, $y_2:=t$ zum Zuge und liefert die oben angegebene Abschätzung.

Bemerkung. Die Hilfssätze 4, 5 und 6 entsprechen sukzessive denjenigen von Walfisz (loc. cit.) wie folgt: Hilfssatz 4, p. 95, Hilfssatz 2, p. 89 und Hilfssatz 3, p. 93.

4. Beweis des Theorems

Für hinreichend großes $x>0$ (etwa $x\geqslant\exp(10^{53})$) bezeichne

$$r_1:=[10^{-2}\log^{1/2}x]\,,\tag{4.1}$$

$$r_2:=3\left[\frac{1}{4}\log\log x\right]+4\,,\tag{4.2}$$

$$r_3:=4\left[\frac{1}{4}\log\log x\right],\tag{4.3}$$

$$\rho_1:=\frac{3}{2r_1}\,,\qquad \rho_2:=\frac{3}{2(r_2-1)}=\frac{2}{4+r_3}\,.\tag{4.4}$$

Die Summe (1.2) gestattet mit der Schreibweise (1.1) folgende Zerlegung

$$S_k(x)=S_k(x;\,0,\,x^{\rho_1})+S_k(x;\,x^{\rho_1},\,x^{\rho_2})+S_k(x;\,x^{\rho_2},\,x^{1/2})+S_k(x;\,x^{1/2},\,x)\,.\tag{4.5}$$

1. Die erste Summe rechts wird trivial abgeschätzt, also

$$S_k(x;\,0,\,x^{\rho_1})=O(\rho_1\log x)=O(\log^{1/2}x)\,.\tag{4.6}$$

2. Unter Beachtung von (3.1), (4.1), (4.2) und (4.3) erhält man zunächst

$$S_k(x; x^{\rho_1}, x^{\rho_2}) = \sum_{r_2 \leqslant r \leqslant r_1} S_k(x; x_1, x_2).$$

Hierin greift nun Lemma 4 Platz und bewirkt

$$\begin{aligned} S_k(x; x^{\rho_1}, x^{\rho_2}) &= O\left(\sum_{r_2 \leqslant r \leqslant r_1} x^{-\varrho}\right) \\ &= O\left(\sum_{r_2 \leqslant r \leqslant r_1} \exp(-10^{-6} r^{-3})\right) \\ &= O(r_1 \exp(10^{-6} r_1^{-3} \log x)) \\ &= O(\log^{1/2} x). \end{aligned} \tag{4.7}$$

3. Ähnlich wie in *2.* ergibt sich, dabei (3.12), (4.3) und (4.4) beachtend

$$S_k(x; x^{\rho_2}, x^{1/2}) = \sum_{r \leqslant r_3} S_k(x; x_3, x_4).$$

Jeder der Summanden rechts ist vom Typ (3.13) und mit Lemma 5 ergibt sich

$$S_k(x; x^{\rho_2}, x^{1/2}) = O(1). \tag{4.8}$$

4. Die in (4.5) verbliebene Summe $S_k(x; x^{1/2}, x)$ besitzt nach Lemma 6 die Größenordnung des O-Termes in (4.8). Fasst man die Resultate (4.6), (4.7) und (4.8) in (4.5) zusammen, so kommt endlich (1.4) heraus.

5. Anwendungen

Unter den zahlreichen Anwendungsbeispielen, in denen die Abschätzung (1.4) Platz greift, werden hier lediglich das l-dimensionale Kugelproblem für den Fall $l=8$ resp. das Verteilungsproblem der pythagoreischen l-Tupel für den Fall $l=5$ besonders hervorgehoben.

1. Für $l \in N$ bezeichne $r_l(n)$ die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als Summe von l Quadraten ganzer Zahlen und

$$A_l(x) := 1 + \sum_{n \leqslant x} r_l(n) \tag{5.1}$$

die zugehörige Verteilungsfunktion. Nach Walfisz ([7], Satz 8, p. 124) ist im Fall $l=8$ für den 'Gitterrest' $P_8(x) := A_8(x) - (\pi x)^4/24$ bekannt:

$$P_8(x) = -16 C_1(x) x^3 + 24 C_2(x) x^2 + O(x \log x), \tag{5.2}$$

wo $C_{1,2}(x)$ beschränkte Funktionen in x bezeichnen. Analog der Vorgehensweise von Fricker ([1]; dort wird (5.1) für $l=6$ untersucht) gelangt man unter Zuhilfenahme der Jacobi*schen* Identität

$$r_8(n) = 16\{\sigma_3(n) - 2\sigma_3^*(n)\};$$

$$\sigma_3(n) := \sum_{d|n} d^3, \qquad \sigma_3^*(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1 \bmod 2}} d^3;$$

von (5.1) ausgehend zu

$$A_8(x) = 1 + 16S(x) - 32S\left(\frac{x}{2}\right) + 256S\left(\frac{x}{4}\right) \tag{5.3}$$

mit

$$S(x) := \sum_{n \leqslant x} \sigma_3(n). \tag{5.4}$$

Mittels der *Euler*schen Summenformel zeigt man rasch

$$S(x) = \frac{\pi^4}{360} x^4 - x^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \psi_1\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{3}{2} x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - xS_3(x) + O(x).$$

Für $k=3$ kommt nun die Abschätzung (1.4) zum Tragen und ergibt

$$S(x) = \frac{\pi^4}{360} x^4 - D_1(x) x^3 + \frac{3}{2} D_2(x) x^2 + O(x \log^{1/2} x). \tag{5.5}$$

Trägt man dies in (5.3) ein, so ersieht man, daß der in (5.2) auftretende O-Term durch $O(x \log^{1/2} x)$ ersetzt werden darf.

2. Ausgangspunkt beim Studium der Verteilung pythagoreischer l-Tupel ist die Funktion

$$Q_l(x) := \sum_{n \leqslant x} r_l(n^2). \tag{5.6}$$

Im Fall $l=5$ ist hierüber bekannt ([5], Theorem 1, p. 61):

$$Q_5(x) = \frac{2\pi^4}{63\zeta(3)} x^4 + C(x) x^3 + O(x^2 \log x), \tag{5.7}$$

wo $\zeta(\cdot)$ die *Riemann*sche Zetafunktion und $C(x)$ eine in x beschränkte Funktion bezeichnet. Mit der Darstellung (cf. [5], Korollar 1, p. 58)

$$r_5(n^2) = 10 \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1 \bmod 2}} \mu(d) d \sigma_3\left(\frac{n}{d}\right);$$

$\mu(\cdot)$ bezeichnet die *Möbius*sche Funktion; erhält man zunächst in (5.6) wegen (5.4)

$$Q_5(x) = 10 \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv 1 \bmod 2}} \mu(n) n S\left(\frac{x}{n}\right).$$

Berücksichtigt man (5.5), so kann der in (5.7) auftretende log-Faktor zu $\log^{1/2} x$ verbessert werden.

Literatur

[1] FRICKER, F.; Über den Gitterrest mehrdimensionaler Kugeln, *Arch. Math.*, **23** (1972), 206–209.

[2] FRICKER, F.; *Einführung in die Gitterpunktlehre*, Basel-Boston-Stuttgart, Birkhäuser, 1982.

[3] VAN HAMME, L.; Generalisation d'un théorème de Walfisz, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* (*5*), **54** (1968), 498–511.

[4] HORN, G.; Ein Teilerproblem, *Math. Nachr.*, **116** (1984), 173–184.

[5] RECKNAGEL, W.; Über die Verteilung der pythagoreischen k-Tupel, *Mitt. Math. Semin. Gießen*, **162** (1984), 69S.

[6] RECKNAGEL, W.; Über eine Vermutung von S. Chowla und H. Walum, *Arch. Math.*, **44** (1985), 348–354.

[7] WALFISZ, A.; Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, *Acta Arith.*, **6** (1960), 115–136.

[8] WALFISZ, A.; *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963.

Fachhochschule München
Fachbereich Informatik
Lothstr. 34
D-8000 München 2
Federal Republic of Germany